

Ruhr-Universität Bochum
Philosophisches Institut
Philosophische Grundlagen der Mathematik
Prof. Pulte
SoSe 08

**Einführende Betrachtungen des
Existenzbegriffs in der Mathematik
unter besonderer Berücksichtigung von
Hermann Weyls Konzeption eines
mathematischen Intuitionismus**

Moritz Schulte
Mathematik, Philosophie
moritz.schulte@rub.de

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	3
1.1	Einführende Betrachtungen des Existenzbegriffs	3
2	Weyls Intuitionismus	5
2.1	Mentale Konstruktionen	6
2.2	Das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten	7
2.3	Der Aufbau des Zahlensystems	8
2.4	Bezug zum Formalismus	10
3	Résumé	11
	Literatur	12

1 Vorwort

Der Begriff der Existenz gehört wohl zu den problematischsten im Rahmen einer philosophischen Grundlegung der Mathematik. Becker zufolge ermögliche er es, „zu untersuchen, welches die philosophischen Wurzeln der mathematischen Theorienbildungen sind“¹. In diesem Sinne wirft er unmittelbar die Frage des Selbstverständnisses der Mathematik auf.

Was es bedeuten soll, von einem „mathematischen Objekt“ auszusagen, dass es existiert, liegt nicht auf der Hand. Und tatsächlich gibt es sehr unterschiedliche Versuche, den Begriff der Existenz in der Mathematik zu präzisieren. Im Folgenden wird versucht, die wesentlichen Aspekte von Hermann Weyls Überlegungen zur Klärung des Existenzbegriffs unter besonderer Berücksichtigung seiner späteren Werke² darzulegen.

1.1 Einführende Betrachtungen des Existenzbegriffs

Grundsätzlich scheint die Bedeutung von Existenz eine sehr kontextabhängige zu sein. Um der Frage nachgehen zu können, was Existenz in der Mathematik bedeuten soll, muss naheliegenderweise zuerst eine Charakterisierung der Wissenschaft Mathematik vorgenommen werden. Da es sich hierbei bereits um ein nicht triviales Unterfangen handelt, soll an dieser Stelle lediglich ein oberflächlicher aber gerade deswegen hoffentlich konsensfähiger Versuch unternommen werden:

- Mathematik ist das Studium von vielfältig miteinander verwobenen, *abstrakten Strukturen*. Die Untersuchung dieser Strukturen mag aus inner- oder außermathematischen Gründen von Interesse sein.
- Wesentliche Aspekte dieses Studiums sind: *Begriffsdefinition*, *Axiomatisierung* und Formulierung bzw. *Beweis* von Aussagen.

Die Mathematik ist insofern eine deduktive Wissenschaft, als dass der Beweis einer Aussage darin besteht, sie aus vorgegebenen, möglichst allgemeinen Axiomen nach *festen Schlussregeln* abzuleiten. Diesem deduktiven

¹vgl. [Becker27, S. 5]

²insb. [Weyl90]

Charakter steht allerdings ein gänzlich verschiedener, ein *schöpferischer* gegenüber. Die Axiomensysteme, Begriffe, Vermutungen und ihre Beweisideen werden schließlich nirgends deduktiv abgeleitet.³ Die mit einer objektiven Beschreibung der Mathematik verbundenen Schwierigkeiten fasst Weyl wie folgt zusammen:

Vielleicht ist „Mathematisieren“, wie Musizieren, eine schöpferische Tätigkeit des Menschen, deren Produkte nicht nur formal, sondern auch inhaltlich durch die Entscheidungen der Geschichte bedingt sind und daher vollständiger objektiver Erfassung trotzen.⁴

Was sind nun die innermathematischen Dinge, von denen wir aussagen möchten, dass sie existieren oder eben nicht existieren? Was sind die mathematischen *Objekte*, falls die Mathematik von solchen handelt?

In Anbetracht der Allgemeinheit der obigen Charakterisierung der Mathematik muss die Beantwortung dieser Fragen abhängen von den konkret vorliegenden mathematischen Theorien und ihren Axiomensystemen. Schließlich können Existenzaussagen überhaupt nur dann sinnvoll sein, wenn es die Axiome oder die Schlussregeln gestatten, von Existenz in irgendeinem näher zu bestimmenden Sinne zu sprechen – andernfalls könnte am Ende eines deduktiven Schlusses nicht von Existenz die Rede sein. Wenn ich beispielsweise als Mathematiker ausgestattet mit Zirkel und Lineal behaupte, dass – bei vorgegebener Einheitsstrecke – der Einheitskreis existiert, dann ist dies zu verstehen als: ich kann ihn mit meinem Zirkel konstruieren.⁵ Wenn ich als Mengentheoretiker behaupte, dass es die leere Menge gibt, dann berufe ich mich damit auf ein Axiom der Mengenlehre, welches mir die Existenz der leeren Menge postuliert.

Nun ist die Frage, was Existenz bedeuten soll, aufs Engste verbunden mit der Frage der zulässigen Schlussregeln: Lässt sich Existenz herleiten, indem aus der Annahme der Nichtexistenz ein Widerspruch hergeleitet wird?

³vgl. „Die aufbauende mathematische Definition“, [Weyl90, S. 22]

⁴[Weyl90, S. 23]

⁵vgl. „Der technische Sinn des Begriffs der mathematischen Existenz in der Antike“ [Becker90, S. 90]

Auf den ersten Blick und auf Grundlage einer zweiwertigen Logik scheint dies unproblematisch zu sein, zumal derartige indirekte Beweise auch in der „anderen Richtung“ gang und gäbe sind: Nichtexistenz wird bewiesen, indem aus der Annahme der Existenz ein Widerspruch abgeleitet wird.⁶ Insofern, als dass die Klärung des Existenzbegriffs die *Schlussregeln*, namentlich das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten, betrifft, handelt es sich hierbei um einen zentralen Aspekt einer Grundlegung bzw. Rechtfertigung der Mathematik und der mathematischen Arbeitsweise.

2 Weyls Intuitionismus

Hermann Weyl (1885–1955) hat die Grundlagendebatte in den zwanziger Jahren entscheidend mitgeprägt. Im Jahre 1904 begann er sein Studium an der Universität Göttingen und promovierte 1908 unter der Leitung David Hilberts. Nachdem er 1913 Professor in Zürich wurde, kehrte er 1930 als Nachfolger von Hilbert nach Göttingen zurück. Angesichts der Bedrohung durch den Nationalsozialismus emigrierte Weyl 1933 zusammen mit seiner jüdischen Frau in die USA, wo er in Princeton eine Professur annahm. Nach seiner Emeritierung im Jahr 1951 reiste Weyl zurück nach Deutschland.⁷

Weyl formulierte seine Kritik an den Grundlagen der Mathematik, insbesondere an Mengenlehre und klassischer Analysis, erstmals in seinem Aufsatz *Über die Definitionen der mathematischen Grundbegriffe* (1910). Seine darin dargelegte Position in Bezug auf eine intuitionistische Grundlegung der Mathematik arbeitete er in seinem Buch *Das Kontinuum* (1918) weiter aus. Wenige Jahre später lernte er Brouwers Konzeption eines mathematischen Intuitionismus kennen, der nachhaltigen Eindruck bei ihm hinterließ. Gegen Ende der zwanziger Jahre versuchte Weyl den Intuitionismus mit Hilberts formalistischem Programm zu versöhnen.⁸

Ausgang der intuitionistischen Mathematik, wie sie von Weyl mitgeprägt

⁶vgl. beispielsweise mit den üblichen Beweisen für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ oder für die Unbeschränktheit der Primzahlen

⁷vgl. [Mancosu98, S. 65ff]

⁸ebd.

wurde, ist eine Schwerpunktverlagerung innerhalb der Mathematik zugunsten der Anschauung (intuitio) des denkenden *Inviduums*. Mathematik wird in diesem Sinne zu einer mentalen, auf *Konstruktionen* basierenden Tätigkeit des Menschen. Die wesentlichen Merkmale von Weyls Konzeption einer intuitionistischen Mathematik werden nun im Hinblick auf die vorliegende Fragestellung skizziert und teilweise den formalistischen gegenüber gestellt.

2.1 Mentale Konstruktionen

*If „to exist“ does not mean „to be constructed“, it must have some metaphysical meaning. – Mr. Int*⁹

Im Rahmen des intuitionistischen Programms wird die Bedeutung von Existenz auf Grundlage des Begriffs der *mentalen Konstruktion* präzisiert: Ein mathematisches Objekt existiert – für das Mathematik betreibende Individuum –, wenn es dieses Objekt im Geiste *konstruiert* hat. An dieser Stelle manifestiert sich eine einschneidende Abgrenzung zur „klassischen“ Mathematik, in welcher, unter Zuhilfenahme einer Axiomatik der Mengen und des Axioms vom ausgeschlossenen Dritten, deutlich freier die Existenz von mathematischen Objekten postuliert werden kann. Die Unterscheidung zwischen diesen beiden Existenzbegriffen – der „abstrakten“ und „effektiven“ Existenz – ist bereits aus der Spätantike überliefert.¹⁰

Für den Intuitionisten sind bloße Existentialaussagen – bezogen auf unendliche Mengen – gar keine Aussagen im eigentlich Sinne, sondern „[evidentermaßen unvollziehbare] unendliche logische Summen“¹¹, da Aussagen ausschließlich im „Hinblick auf gelungene Konstruktionen Sinn [gewinnen]“¹². In diesem Sinne vergleicht Weyl eine Existentialaussage mit einem Papier, „welches das Vorhandensein eines Schatzes anzeigt“¹³, ohne den genauen Ort dieses Schatzes zu offenbaren.

⁹aus [Heyting56, S. 56]

¹⁰vgl. Bericht von Johannes Philoponos, siehe [Becker90, S. 94]

¹¹[Weyl90, S. 71]

¹²ebd.

¹³ebd.

2.2 Das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten

„*Logic is not the ground upon which I stand.*
How could it be?“ – Mr. Int¹⁴

Das aus der formalen Logik bekannte Grundprinzip des ausgeschlossenen Dritten postuliert, dass für eine gegebene Aussage A stets $A \vee \neg A$ gilt. Das Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch vorausgesetzt bedeutet dies also: entweder gilt „ A ist wahr“ oder es gilt „ A ist falsch“.

Entscheidend für die intuitionistische Mathematik ist nun, dass – im Gegensatz zur klassischen Mathematik – ein *qualitativer* Unterschied zwischen einer „wahren“ und einer „falschen“ Aussage besteht. A drücke einen mathematischen Sachverhalt aus. Die Aussage A bedeutet dann: „Ich habe die für die Einsicht von A erforderliche mentale Konstruktion durchgeführt“ (also beispielsweise eine Funktion mit gewissen Eigenschaften oder den Schnittpunkt zweier Geraden konstruiert). Hingegen bedeutet die Aussage $\neg A$: „ich habe die mentale Konstruktion durchgeführt, dass die Annahme einer durchgeführten Konstruktion von A einen Widerspruch zur Folge hat“. Mit anderen Worten: Eine positive Aussage besteht in einer Konstruktion, eine negative Aussage hingegen in der Konstruktion der Absurdität einer Konstruktion. Zentral für die intuitionistische Auffassung ist nun, dass „Absurdität von Absurdität“ keineswegs gleichbedeutend ist mit einer positiven Konstruktion; das logische Prinzip $\neg\neg A = A$ ist angesichts der vorliegenden Interpretation in der Tat nicht anwendbar.

Brouwer sieht den historischen Glauben an das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten dadurch verursacht, dass aus der „Mathematik der Teilmengen einer bestimmten *endlichen* Menge die klassische Logik abstrahiert, [...] dieser Logik eine von der Mathematik unabhängige Existenz a priori zugeschrieben und sie schließlich auf Grund dieser vermeintlichen Apriorität [...] auf die Mathematik der unendlichen Mengen angewendet wurde“¹⁵. In seiner „Dritten Einsicht“¹⁶ postuliert er außerdem die Äquivalenz des Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten mit dem Prinzip von der Lösbarkeit jedes

¹⁴[Heyting56, S. 59]

¹⁵vgl. [Becker27, S. 55]

¹⁶vgl. [Becker90, S. 334]

mathematischen Problems – ein Prinzip, welches seit Gödel nicht mehr aufrechterhalten werden kann.

Wesentlicher Aspekt von Hilberts Formalismus war die Suche nach einem Beweis für die Widerspruchsfreiheit der gesamten formalisierten Mathematik. Ein solcher Beweis ist wesentlich für den „freien“ Gebrauch des Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten für Existenzbeweise, denn nur wenn garantiert ist, dass in einem formalen System niemals eine Aussage zusammen mit ihrer Kontradiktion abgeleitet werden kann, kann zumindest widerspruchsfrei die Existenz eines mathematischen Objekts behauptet werden, sobald die Nichtexistenz dessen ad absurdum geführt wurde. Zu Anfang gab es einige vielversprechenden Ansätze; u.a. hat Hilbert die Widerspruchsfreiheit der Geometrie auf die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik zurückgeführt. Im Jahre 1931 veröffentlichte Gödel dann allerdings seine berühmten *Unvollständigkeitssätze*, die u.a. zeigten, dass es unmöglich ist, die Widerspruchsfreiheit (eines hinreichend umfangreichen formalen Systems) mit den Mitteln dieses Systems selbst zu beweisen. Da insbesondere die axiomatisierte Arithmetik der natürlichen Zahlen ein Beispiel für ein solches hinreichend umfangreiches System ist, ergeben sich offensichtlich weitreichende Konsequenzen für die gesamte Mathematik: ihre Widerspruchsfreiheit kann geglaubt und erhofft, aber nicht bewiesen werden.

2.3 Der Aufbau des Zahlensystems

Die Arithmetik beginnt mit den natürlichen Zahlen: $1, 2, 3, \dots$. Entscheidend bei einer intuitionistischen Betrachtung der natürlichen Zahlen ist ihre Auffassung als *Sequenz*, die mit der 1 beginnt, von Zahl zu Zahl voranschreitet und auf diese Weise jede beliebige Zahl *erzeugt*¹⁷. In diesem Zusammenhang zitiert Weyl Schopenhauers Auffassung des Zahlbegriffs: „Jede Zahl setzt die vorhergehenden als Gründe ihres Seins voraus: zur *zehn* kann ich nur gelangen, durch alle vorhergehenden . . .“¹⁸. Weiter handele es sich bei der Zeit „als Form des reinen Bewusstseins“ um eine „wesenhafte [...] Voraussetzung für

¹⁷vgl. [Weyl90, S. 51]

¹⁸ebd

die geistigen Operationen, in denen der Sinn der Zahlaussage gründet¹⁹. Auf diese Weise werden die natürlichen Zahlen, als Fundament der Mathematik, aus einem Grundverständnis der *zeitlichen Abfolge* abgeleitet und somit als mentale Konstruktion gewonnen. Kroneckers „Die ganze Zahl schuf der liebe Gott [...]“ wandelt sich hier zu „Die ganze Zahl *erschafft* der menschliche Geist“.

Eine „selbstständige Existenz“ schreibt Weyl den natürlichen Zahlen als „idealen Objekten“ *nicht* zu; stattdessen erschöpfe sich ihr Sein „in der funktionalen Rolle, die sie spielen, und ihren Beziehungen des Mehr oder Weniger“²⁰. Aus intuitionistischer Sicht wesentlich ist, dass die Zahlenreihe nicht als ein „geschlossene[r] Inbegriff an sich existierender Gegenstände“²¹ betrachtet wird. Genau an dieser Stelle manifestiere sich der in der nicht-intuitionistischen Mathematik übliche „Sprung ins Jenseits“²², d.h. ins transfinite: Das Zahlssystem wird zu einem „Reich absoluter Existenzen“²³, welches insbesondere suggeriert, man könne mit den nun geschaffenen *aktual-*unendlichen Mengen genauso arbeiten wie mit den endlichen.

Aufbauend auf der Zahlenreihe wird – in weitgehendem Einklang mit Brouwer – ein Begriff des Kontinuums hergeleitet, der dem anschaulichen Wesen des Kontinuums als „Medium freien Werdens“ anstelle eines „Aggregats fester Elemente“²⁴ gerecht wird. So wird die einzelne reelle Zahl definiert durch eine „*Folge* natürlicher Zahlen“²⁵. Das Kontinuum als Ganzes wird repräsentiert durch eine „werdende Wahlfolge“, die „von Schritt zu Schritt durch freie Wahlakte entsteht“²⁶. Dies steht im deutlichen Gegensatz zur nicht-intuitionistischen Begründung der reellen Zahlen²⁷ durch Mengen von rationalen Zahlen, die sog. *Schnitte*.

¹⁹[Weyl90, S. 55]

²⁰vgl. [Weyl90, S. 54]

²¹vgl. [Weyl90, S. 56]

²²ebd.

²³ebd.

²⁴vgl. [Weyl90, S. 73]

²⁵ebd.

²⁶ebd.

²⁷beispielsweise nach Dedekind

2.4 Bezug zum Formalismus

*„I see the difference between formalists and intuitionists
mainly as one of taste.“ – Mr. Int²⁸*

Obwohl Brouwer in einer seiner Schriften die praktische Unvereinbarkeit von Intuitionismus und Formalismus postulierte („There are eminent scholars on both sides and the chance of reaching an agreement within a finite period is practically excluded.“²⁹), versuchte sich gerade Weyl in diesem Punkt als Mittler.

Becker unterstrich, dass es – bei allen Differenzen zwischen den beiden Theorien – zumindest auch eine gemeinsame philosophische Basis gebe. Dazu zähle insbesondere die Auffassung der „Notwendigkeit einer *gemeinsamen Begründung*“³⁰ von Logik und Arithmetik. Insofern findet auf beiden Seiten eine deutliche Abgrenzung zu den Bestrebungen der Logizisten statt. Becker geht sogar so weit, zu behaupten, dass „für das Gebiet der endlichen Gesamtheiten volle Übereinstimmung“³¹ zwischen Intuitionisten und Formalisten bestehe und die wesentlichen Unterschiede sich erst im Problem des Unendlichen manifestieren.

Im Hilbertschen Formalismus, so erklärt er, kämen, „um die Gültigkeit der einfachen logischen Gesetze künstlich wiederherzustellen“, zu den *sinnvollen* gewisse „ideale Aussagen“ hinzu, die sich einer im engeren Sinne inhaltlichen Deutung entzögen.³² Das jenseits der transfiniten Mengen operierende tertium non datur integriert Weyl, indem er in Form von Axiomen einen „göttlichen Automaten“³³ postuliert, der es uns zum Einen erlaubt von Existentialaussagen auf „Instantiierungen“ dieser Aussage zu schließen und zum Anderen von bestimmten anderen Aussagen her auf Allaussagen. Weyl betont zwar, dass der „Glaube an [die Existenz dieses Automaten] natürlich der reinste Unsinn“ sei, die Mathematik jedoch so *tue*, als gäbe es ihn.³⁴

²⁸aus [Heyting56, S. 56]

²⁹vgl. [Brouwer, S. 77]

³⁰vgl. [Becker27, S. 22]

³¹ebd., S. 24

³²vgl. [Weyl90, S. 76ff]

³³ebd.

³⁴ebd.

3 Résumé

Es scheint, als hätten sich bei aller Kürze dieser Arbeit zumindest zwei Facetten der Existenz herauskristallisiert: auf der einen Seite wird die Existenzfrage für gewisse mathematische Grundobjekte (wie z.B. die natürlichen Zahlen oder auch die Mengen) aufgeworfen, auf der anderen Seite ist dieser Begriff im Kontext von darauf aufbauenden Schlussfolgerungen – den Beweisen innerhalb eines mathematischen Systems – zu sehen. Der mathematische Intuitionismus empfiehlt zur Klärung in beiden Fällen den Begriff der mentalen Konstruktion als Grundlage, schließlich seien jene konstitutiv für die gesamte Mathematik. Zwar führt Weyl nicht im Detail aus, was unter einer mentalen Konstruktion zu verstehen ist, dies spiegelt aber nur den subjektiv-individuellen Charakter der intuitionistischen Mathematik wider. Insofern grenzt sich der Intuitionismus deutlich von einer „platonischen“ Konzeption der Mathematik ab, in deren Kontext den „idealen Gegenständen“ durchaus eine Existenz *unabhängig* von dem Mathematik betreibenden Individuum zukommt.

Der intuitionistische Ansatz und die damit verbundene Unterstreichung der mentalen Tätigkeit als wesentliches Merkmal der Mathematik macht auf mich – zumindest wenn man die selbst von Weyl zugegebene „Schwerfälligkeit“³⁵ für den Moment übersieht – einen erfrischenden Eindruck. Allerdings drängt sich sofort der Wunsch auf, den Begriff der Konstruktion deutlich weiter zu fassen, als es beispielsweise Brouwer getan hat, um auf diese Weise auch das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten meinen eigenen mentalen Konstruktionen zu Grunde legen zu dürfen. Mathematik betreibt Abstraktion – lässt sich dann nicht sinnvollerweise auch vom Begriff der mentalen Konstruktion abstrahieren? Analog zu einer „Grundintuition der Zeit“ als einem Prinzip, aus dem beispielsweise die natürlichen Zahlen abgeleitet werden (und somit *im Geist* existieren!), könnte eine Art „Grundintuition der Unvereinbarkeit“ in Erwägung gezogen werden, um auf diese Weise den indirekten Beweis zu retten.

³⁵[Weyl90, S. 75]

Literatur

- [Becker90] Becker, Oscar: *Grundlagen der Mathematik*. Frankfurt am Main: Suhrkamp-Taschenbuch Wissenschaft (1990).
- [Mancosu98] Mancosu, Paolo: *From Brouwer to Hilbert*. New York, Oxford: Oxford University Press (1998).
- [Weyl90] Weyl, Hermann: *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften*. 6. Auflage, München: R. Oldenbourg Verlag (1990).
- [Heyting56] Heyting, Arend: *Intuitionism, An Introduction*. In *Philosophy of Mathematics – Selected Readings*. Oxford: Basil Blackwell (1964).
- [Brouwer] L.E.J., Brouwer: *Intuitionism and Formalism*. In *Philosophy of Mathematics – Selected Readings*. Oxford: Basil Blackwell (1964).
- [Becker27] Becker, Oscar: *Mathematische Existenz*. 2. unveränderte Auflage, Tübingen: Max Niemeyer Verlag (1973).
- [WWWGöttingen] http://www.math.uni-goettingen.de/Personen/Bedeutende_Mathematiker/weyl.html (26. März, 09)